E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.P.I. LYON - I.S.E.N. LILLE TOULON - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1991

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

SERIE M

Lundi 6 mai 1991 de 8 h à 12 h

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée.
Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.
Les théorèmes utilisés doivent être énoncés soigneusement.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés analytiques et arithmétiques de la fonction Dzéta de Riemann définie par :

$$x \mapsto S(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^x} .$$

PARTIE I :

On se propose, dans cette partie, d'étudier l'allure de la fonction Dzéta.

1) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de S.

2) Montrer que S est une fonction strictement décroissante sur $\mathcal{D}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $\varphi_n(x) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x} \right) dt$.

a) Montrer que φ_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) On pose : $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ où cette série converge.

i) Montrer que cette série est normalement convergente sur tout intervalle [a,b] où a > 0 et b > a.
(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).

ii) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n'(x)$ est-elle normalement convergente sur cet intervalle ?

c) i) Après avoir vérifié l'égalité : $S(x) = \frac{1}{x-1} + \varphi(x)$, montrer que S est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$.
Quel est le signe de la dérivée S' sur $\mathcal{D}$?

ii) Montrer que S(x) est équivalent à $\frac{1}{x-1}$ au voisinage de 1.

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} S(x) = 1$.

4) Tracer la courbe représentant S dans un repère orthonormé.

5) Pour tout x réel où la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge, on pose :

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} .$$

i) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}'$ de ω.

ii) Pour tout $a > 0$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, établir que :

$$\left| \omega(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leqslant \frac{1}{(N+1)^a} .$$

En déduire que ω est continue sur $\mathcal{D}'$.

iii) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$: $\omega(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) S(x)$.

PARTIE II

On s'intéresse, dans cette partie, à l'étude de certaines sommes S(2k), ainsi qu'à une série convergeant rapidement vers S(3).

1) Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fixé et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique définie par : $\forall x \in [-\pi, +\pi]$, $f(x) = \cos(tx)$.

a) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

b) La série de Fourier de f converge-t-elle vers f ?

A SUIVRE

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}\right)$

puis que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $x \operatorname{cotg} x = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2\pi^2 - x^2}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g_n :]-\pi, +\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^2}{n^2\pi^2 - x^2}$$

a) Développer g_n en série entière à l'origine.
Quel est son rayon de convergence ?

b) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_N(x) = 1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{2x^2}{n^2\pi^2 - x^2}$.
Montrer que S_N est développable en série entière et donner son développement.
Quel est son rayon de convergence ?

3) Pour x réel, on pose : $T(x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} S(2n) \frac{x^{2n}}{\pi^{2n}}$ lorsque cette série converge.

a) Montrer que le rayon de convergence de cette série est égale à π (utiliser I.3.c).

b) En s'aidant de $S_N(x)$, montrer que :

$$\forall x \in]-\pi, +\pi[\quad , \quad x \operatorname{cotg} x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} S(2n) \frac{x^{2n}}{\pi^{2n}}$$

4) a) Ecrire le développement limité de $x \operatorname{cotg} x$ au voisinage de 0 à l'ordre 6.

b) En déduire les valeurs de $S(2k)$, puis celles de $\omega(2k)$ pour $k = 1,2,3$.

5) a) Soit $h : [-1,+1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\text{Arc sin } x}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $|x| < 1$, on a : (E) $h(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \frac{x^{2k}}{2k+1}$

où $C_k = \frac{1.3.5. \ldots (2k-1)}{2.4.6. \ldots (2k)}$.

On admettra dans la suite du problème que l'égalité (E) s'étend à l'intervalle [-1,+1], et que la convergence de la série est uniforme sur cet intervalle.

b) Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} t \, dt$, et en déduire que :

$$C_k \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} t \, dt = \frac{1}{2k+1} .$$

c) Montrer que : pour $|x| \leqslant 1$, $\int_0^x \frac{\text{Arc sin}\, t}{t} \, dt = x + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$.

Puis que : pour $|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\int_0^t u \cotg u \, du = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k \frac{\sin^{2k+1} t}{(2k+1)^2}$.

6) a) Montrer l'égalité :

$$\text{pour } |t| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad t - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S(2n)}{\pi^{2n}} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \frac{\sin^{2n+1} t}{(2n+1)^2} ,$$

et enfin que :

$$S(3) = \frac{\pi^2}{7} \left(1 - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S(2n)}{(2n+1)(2n+2)\ 2^{2n}} \right) \quad (*) .$$

b) Donner un équivalent de $S_n(3) - S(3)$ en $+\infty$.

7) On désire obtenir une valeur approchée de $S(3)$ à 10^{-3} près.

a) Combien de termes devra-t-on calculer si l'on utilise la définition $S(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$?

b) Montrer que les quatre premiers termes suffisent si on utilise la relation (*).

c) Donner une valeur approchée de $S(3)$ et conclure.

FIN